

LM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Schar der in \mathbb{R} definierten Funktionen $f_k : x \mapsto (2x + k) \cdot e^{-\frac{x}{k}}$ mit $k > 0$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

- 4 1. a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_k mit den Koordinatenachsen. Untersuchen Sie das Verhalten der Scharfunktionen für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$.
- 9 b) Bestätigen Sie :
- $$f_k'(x) = -\frac{1}{k}(2x - k) \cdot e^{-\frac{x}{k}} \text{ und } f_k''(x) = -\frac{1}{k^2}(2x - 3k) \cdot e^{-\frac{x}{k}}$$
- Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunktes von G_k . Zeigen Sie, daß G_k einen Wendepunkt hat, und geben Sie dessen Koordinaten an.
- 3 c) Weisen Sie nach, daß die Extrempunkte aller Graphen G_k auf einer Geraden liegen, und geben Sie eine Gleichung dieser Geraden an.
- 2 d) Zeigen Sie, daß die Wendetangenten aller Graphen der Schar zueinander parallel sind.
- 4 e) Berechnen Sie die Gleichung der Wendetangente von G_2 und den Schnittpunkt dieser Wendetangente mit der x -Achse.
- 7 f) Zeichnen Sie die Graphen G_2 und G_4 unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm).
- 3 g) $P(p|0)$ ist ein Punkt der x -Achse. Für welche Werte von p gibt es eine Tangente von G_2 durch P ? Anschauliche Überlegung am Graphen genügt.
- 8 2. Der Graph G_k und die x -Achse schließen ein Flächenstück ein, das sich im 1. Quadranten ins Unendliche erstreckt. Zeigen Sie, daß diesem Flächenstück für alle k ein endlicher Inhalt I_k zugeordnet werden kann. Geben Sie den Wert von I_k an.