1. Überblick und zentrales Anliegen

1.1 Thema	Lineare Funktionen: Aus dem Schaubild die Struktur der Funktionsgleichung bestimmen und begründet entscheiden durch welche Angaben eine lineare Funktion eindeutig festgelegt wird.
1.2 Lehrplanbezug	In BPE 1.4 findet sich: "Die Schülerinnen und Schüler deuten Geraden als Graphen linearer Funktionen. Sie geben die Gleichungen besonderer Geraden an und begründen, dass eine Parallele zur y-Achse nicht Graph einer Funktion ist. "
1.3 Zentrales Anliegen	Die Lernenden erarbeiten sich die Struktur der Funktionsgleichung der linearen Funktionen ausgehend von einem Schaubild. Sie gehen dabei in Schritten vor, die zunehmend abstrakter werden. Dabei stärken sie insbesondere ihre mathematischen Kompetenzen K1 (mathematisch argumentieren) und K4 (mathematische Darstellungen verwenden). Zusätzlich soll durch Arbeit in Kleingruppen, die Integration aller Schüler in den Klassenverband verbessert werden.
1.4 Lehr-Lernarrangement	Zuerst wird gemeinsam ein Koordinatensystem betrachtet in das verschiedene Geraden eingezeichnet sind. Es wird gemeinsam besprochen, welche der Geraden Funktionen sind und welche nicht. Danach werden die Funktionen, deren Schaubild eine Gerade zeigt, als lineare Funktionen benannt und weiter untersucht. Dies geschieht in einer Kleingruppenarbeit, in der die Lernenden nach und nach herausarbeiten, wie genau die Funktionsgleichung einer Geraden aussehen muss. Dies wird im Anschluss zur Sicherung mit allen besprochen. Danach bearbeiten die Lernenden eine Aufgabe, in der sie beurteilen, ob eine lineare Funktion durch gegebene Angaben festgelegt ist oder nicht. Auch diese Aufgabe wird anschließend gemeinsam besprochen.

2. Begründungszusammenhänge/Vertiefung

2.1 Rahmenbedingungen und Einbettung der Stunde

Der Unterrichtet findet in einer Eingangsklasse des technischen Gymnasiums statt. Die Klasse besteht aus 18 Lernenden. Innerhalb der Klasse gibt es natürlich Unterschiede im Vorwissen und der Leistungsfähigkeit der Lernenden. Diese gehen aber nicht über das übliche Maß in einer Eingangsklasse hinaus.

In den Stunden zuvor wurde der Funktionsbegriff eingeführt. Es wurden Wertetabellen für Funktionen erstellt. Und es wurden Schaubilder mit Hilfe dieser Wertetabellen gezeichnet. Letzteres geschah allerdings in Stillarbeit und konnte bisher aus terminlichen Gründen noch nicht besprochen werden.

In den folgenden Stunden geht es mit der Berechnung von Funktionsgleichungen linearer Funktionen weiter. Außerdem werden Anwendungsaufgaben, die mit Hilfe dieses Funktionstyps gelöst werden können, bearbeitet.

2.2 Lernziele und Kompetenzentwicklung

Die Lernenden können begründen weshalb Geraden, die Funktionen sind Funktionsgleichungen der Art $f(x) = mx + b$ haben müssen. Sie können begründen, weshalb senkrechte Geraden keine Funktionen darstellen.

Die Lernenden können beurteilen ob gegebene Angaben ausreichen, um eine lineare Funktion festzulegen.

Kompetenzen, die besonders gefördert werden sollen:

“Mathematisch argumentieren” (K1): z.B. beim Begründen, weshalb senkrechte Geraden keine Funktionen darstellen. Oder auf deutlich höherem Anforderungsniveau beim Errechnen der Struktur der Funktionsgleichung der linearen Funktionen. (“Beweise und anspruchsvolle Argumentationen nutzen, erläutern oder entwickeln” KMK-Standards)

K4 (mathematische Darstellungen verwenden) wird ebenfalls besonders gefördert. Die Lernenden trainieren den Umgang mit Wertetabellen und dem Symbol $f(x)$ sehr verstärkt.

Durch die Arbeit in Kleingruppen, die sonst so nicht zusammenarbeiten soll die Integration aller Schüler in die Klassengemeinschaft verbessert werden.

2.3 Inhalte

2.3.1 Voraussetzungen

Die Lernenden müssen wissen, was eine Funktion ist und wie man Funktionen zeichnet. Sie müssen mit Wertetabellen umgehen können und das Konzept der Funktionsgleichung verstanden haben. Beides wurde in den Stunden zuvor behandelt.

Theoretisch wäre es sogar besser, wenn sie sich nicht daran erinnern, wie Geradengleichungen aussehen, die sie aus der Realschule bereits kennen.

2.3.2 Sachanalyse

Aufgrund der Definition einer Funktion, die besagt, dass jedem Element aus der Definitionsmenge genau ein Element der Zielmenge zugeordnet werden muss, wird klar, dass eine senkrechte Gerade keine Funktion sein kann. Das sollte eigentlich allen klar sein. Hier sind keine Probleme zu erwarten.

Schwieriger ist das zweite Lernziel: Ausgehend von einer nicht senkrechten Geraden zu folgern, dass die Funktionsgleichung nur von der Form $f(x) = mx + b$ sein kann.

Für die Schüler wird dieses Problem in Etappen zerlegt:

1. Etappe: Erkennen, dass Punkte genau dann auf einer Geraden liegen, wenn jeder gleichgroße Schritt nach rechts (oder links), die gleiche Änderung in der Höhe bewirkt. Dies wird zuerst mit konkreten Werten an Beispielen erkannt. Danach wird abstrahiert und sowohl Funktionswerte als auch Steigung sind keine konkreten Zahlen mehr.
2. Erkennen wie man den Funktionswert an einer Stelle durch Kenntnis der Funktionswerte anderer Stellen und den Abstand der Stellen voneinander berechnen kann. Auch dies geschieht auf zwei Abstraktionsstufen in A2 unter der Wertetabelle.
3. Ausgehend von der Gleichung $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + x_2m$ kann nun die allgemeine Funktionsgleichung aufgestellt werden. Man rechnet nach, dass $f(x) = f(0 + x) = f(0) + xm$ ist, und macht sich klar, dass $f(0)$ lediglich eine Zahl ist. Damit ist man fertig.

Zu erwarten ist, dass es hier zu Schwierigkeiten kommt. Zum einen beim Umgang mit den mathematischen Schreibweisen. So ist z.B. die Schreibweise $f(x) = \ldots$ für die Schüler von der Realschule neu. Andererseits ist zu erwarten, dass das Verständnis dafür bei einigen fehlt, wozu man diesen schwierigen Weg geht, um am Ende etwas herauszufinden, was sie sowieso schon wussten, nämlich welche Struktur die Funktionsgleichung einer linearen Funktion haben muss.

2.4 Gestaltung des Lehr-/Lernarrangements

Der Einstieg ist das gemeinsame Betrachten eines Koordinatensystems in dem vier Geraden zu sehen sind. Dabei sollen die Schüler den Funktionsbegriff wiederholen und beschreiben, was eine Gerade ausmacht. Danach wird das Programm verkündet. Beides soll zügig passieren.

Danach werden die Gruppen gemacht und es geht an die Arbeit in den Gruppen. Rein mathematisch gibt es keinen Grund die Schüler umzusetzen. Das Ziel hierbei ist ein soziales Ziel. Alle sollen mit allen in Kontakt kommen.

In dem ersten Arbeitsblock sollen die Aufgaben 1 bis 3 bearbeitet werden. In Aufgabe 1 soll eine Wertetabelle vervollständigt werden. Das ist aufgrund des Schaubildes auch durch Ablesen möglich, was es aber schwieriger macht als durch Überlegen.

Die vielen Werte sind deshalb gewählt, um die Schüler auf die Gesetzmäßigkeit zu stoßen ("immer eins mehr" bzw. "alles gleich"). Letztendlich ist es diese Proportionalität die, diese Funktionen ausmacht.

Beim Vervollständigen der Wertetabelle in A2 wird im Prinzip das gleiche gemacht wie in A1. Der Unterschied ist, dass jetzt nicht mehr abgelesen werden kann, sondern gerechnet werden muss. Zusätzlich treten verschiedene Schrittweiten auf.

Unter der Wertetabelle wird dann in der dritten Zeile die Gleichung erarbeitet, die das Wesen der linearen Funktionen, die Proportionalität der Änderung von y-Wert und x-Wert ausdrückt. Hier wird streng formal mit mathematischen Symbolen gerechnet. Es ist klar, dass einige das in dieser Stunde nicht schaffen werden. Das ist aber in Ordnung. Die Kompetenzen werden in der intensiven Auseinandersetzung mit der Sache aufgebaut.

Alleine für sich wäre die Aufgabe wohl zu abstrakt, deshalb die Vorbereitung durch A1.

Danach folgt der Gipfel der Stunde. Das Rätsel wird gelöst. Die Rechnung selbst ist simpel, wenn man den Ansatz gefunden hat. Diesen gibt es als Hilfestellung unten auf dem Blatt. Ansonsten lässt sich hier das Gleiche sagen, wie zum Ende von A2.

Für diese Aufgaben sind 20 Minuten angesetzt und eine Besprechungszeit von 13 Minuten.

Aufgabe 4 stellt dann einen Themenwechsel dar und ist vom Schwierigkeitsgrad her wieder deutlich einfacher. Diese Aufgabe habe ich auch deshalb ausgewählt. Ein weiter Grund ist, dass es inhaltlich an diese Stelle sehr gut passt. Bei der konkreten Auswahl der gewählten Angaben, habe ich die erste Frage genommen, um nochmal zu üben, was eine Funktionsgleichung ist. (Für die Schüler, die bei A3 ausgestiegen sind.)

Dann wird die Frage gestellt, ob ein Punkt bzw. ein Punkt und der Steigungswinkel zur Festlegung ausreicht. Dies soll die Vorstellungsfähigkeiten der Lernenden fördern.

Die Frage ob zwei Punkte ausreichen, habe ich hier nicht gestellt, sie wird aber in den kommenden Stunden beantwortet werden.

Quellen:

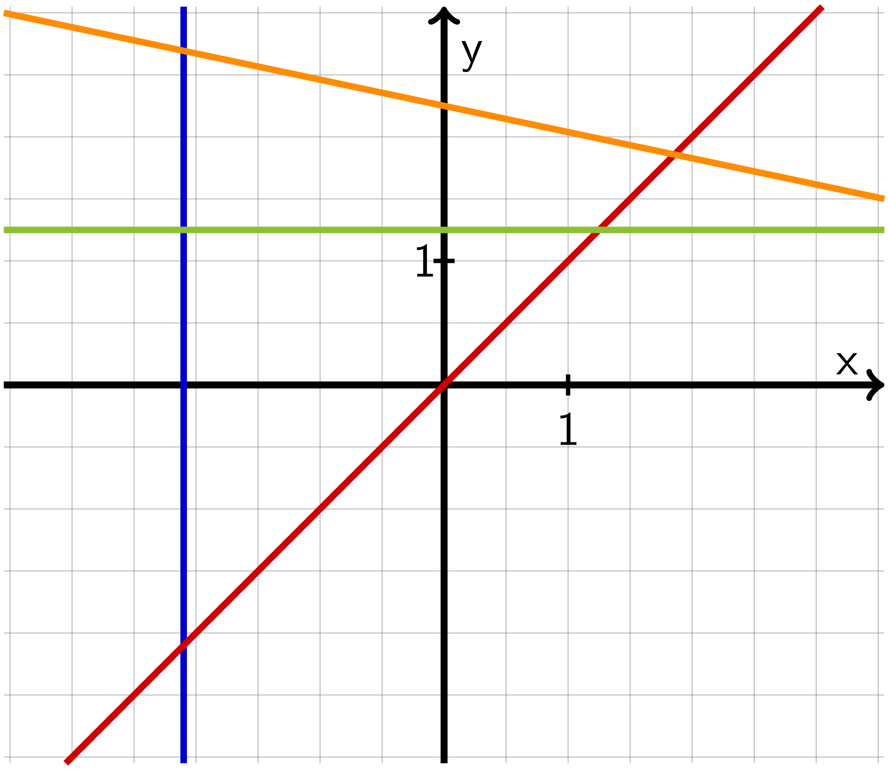
https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

https://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/M_OS_gN

(Bildungsplan)

Verlaufsplan (Vorschlag 1)

Dauer (min)	**Ziele/Struktur** U-Phasen	**Lehrerhandeln** Lernimpulse durch die Lehrperson	**Schülerhandeln** Antizipierter Lernprozess der Schüler/innen	**Lernsituation** Lehr-Lern-Arrangement	**Medien** Materialien
3	Einstieg	Zeigt Bild mit 4 Geraden. Nach Beantwortung der Fragen wird das Programm bekannt gegeben: Herausfinden der Struktur der Funktionsgleichungen linearer Funktionen.	*Beschreiben die Objekte, die zu sehen sind. (Geraden). Wiederholen den Begriff der Funktion.*	Es wird im Klassenverband besprochen.	Beamer und Folie
20	Erarbeitung	Lehrer beobachtet, falls nötig gibt er Hilfestellung.	Bearbeiten die Aufgaben 1 bis 3. Diese werden zunehmend schwieriger.	Lernende arbeiten in Kleingruppen an den Aufgaben.	Aufgabenblatt
13	Sicherung	Lehrer moderiert die Besprechung der Aufgaben. Er greift Fehler und gute Ideen auf.	Lernende stellen ihre Lösungen dar und begründen diese. Sie vergleichen ihre Ergebnisse mit der Lösung und haben die Gelegenheit Fragen zu stellen und zu beantworten.	Es wird im Klassenverband besprochen.	Tafel, Kamera
5	Erarbeitung 2	*Lehrer gibt falls nötig Denkanstöße.*	Sie bearbeiten Aufgabe 4.	Lernende arbeiten in Kleingruppen. Sie diskutieren ihre Ideen innerhalb ihrer Gruppe.	Aufgabenblatt
4	Sicherung	Lehrer moderiert die Besprechung.	Lernende stellen ihre Lösungen dar und begründen diese. Sie korrigieren ihre Lösungen und fragen, falls weiter etwas unklar bleibt.	Es wird im Klassenverband besprochen.	Tafel Kamera

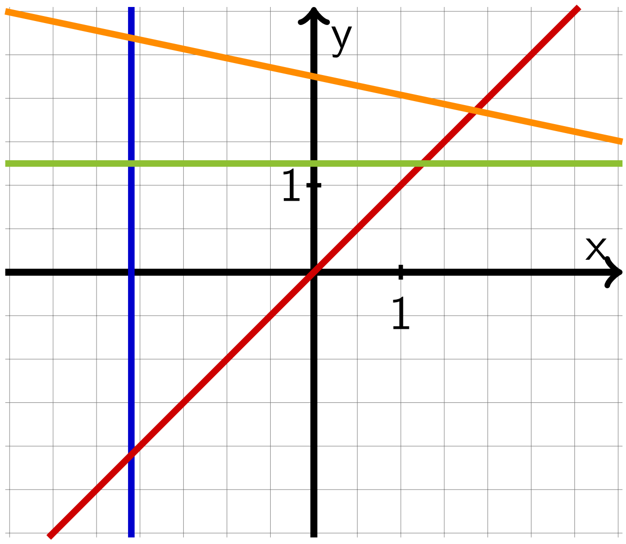


Beschreiben Sie die Objekte, die zu sehen sind.
Bei welchen davon handelt es sich um Funktionen? Bei welchen nicht. Begründen Sie.

Lineare Funktionen

Wir wollen heute die Funktionsgleichungen dieser Objekte untersuchen. Man nennt sie lineare Funktionen (lat. linea „Linie“). Wir wollen herausfinden

- welche Struktur diese Funktionsgleichungen haben müssen.
- durch welche Angaben solch eine Funktion festgelegt wird.



Arbeitsauftrag (20 Minuten, Gruppenarbeit)

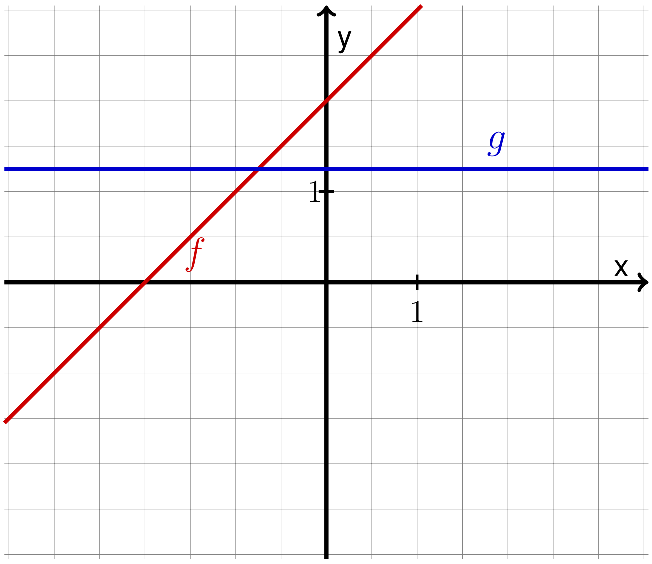
Bearbeiten Sie A1 bis A3 auf dem Aufgabenblatt in Kleingruppen.

Arbeitsauftrag (5 Minuten, Gruppenarbeit)

Bearbeiten Sie A4 auf dem Aufgabenblatt in Kleingruppen.

A1

Sie sehen im Schaubild die Funktionen f und g. Vervollständigen Sie die Wertetabelle.

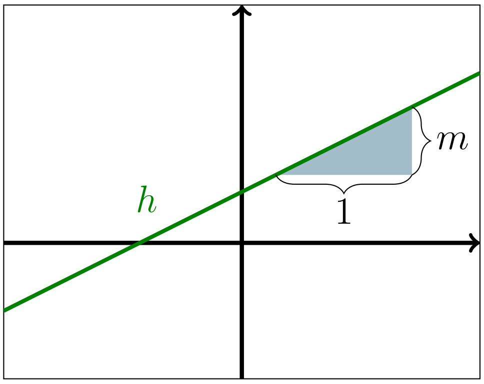


x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$					2	3			
$g(x)$		1.25							1.25

A2

Sie sehen im Schaubild die Funktion h.

- Vervollständigen Sie die Wertetabelle. Stellen Sie die Funktionswerte mit Hilfe von $h(-2)$ und m dar.
- Ergänzen Sie die Gleichungen unterhalb der Wertetabelle in dem Sie die richtige Anzahl m addieren.



x	-2.5	-2	-1	0	10
$h(x)$		$h(-2)$	$h(-2)+m$		

$$h(5) = h(2) + \boxed{}$$

$$h(5) = h(3) + \boxed{}$$

$$h(x_1 + x_2) = h(x_1) + \boxed{} = h(x_2) + \boxed{}$$

A3

Wir haben in A2 gesehen, dass für eine lineare Funktion f stets

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + x_2 \cdot m = f(x_2) + x_1 \cdot m \tag{1}$$

für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und ein bestimmtes $m \in \mathbb{R}$ gelten muss. (Das m hängt natürlich von der konkreten linearen Funktion ab.)

Berechnen Sie aus Gleichung (1) die allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Funktion.
(Es muss natürlich $f(x) = m \cdot x + b$ herauskommen. Falls Sie einen weiteren Tipp benötigen, findet dieser sich etwas versteckt am unteren Ende dieser Seite.)

A4

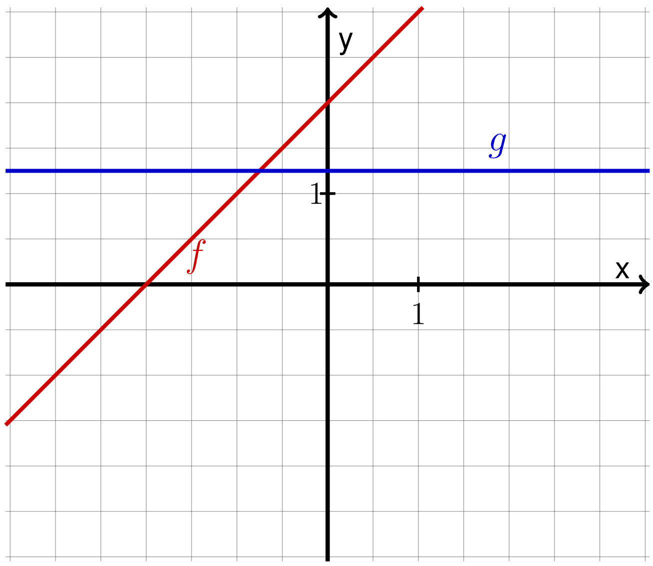
Entscheiden Sie ob durch die jeweiligen Angaben die lineare Funktion eindeutig festgelegt wird. Begründen Sie kurz.

Angaben	**Ja**	**Nein**	**Begründung**
Durch Angabe der Paramter m und b der allgemeinen Funktionsgleichung.			
Durch die Angabe eines Punktes, der im Graph der Funktion enthalten ist.			
Durch Angabe eines Punktes (der im Graph der Funktion enthalten ist) und des Steigungswinkels.			
Durch die Angabe, dass die Funktion ausschließlich im ersten und dritten Quadranten verläuft.			

Hinweis A3: Beginnen Sie mit $f(x) = f(x+0) = \dots$ und verwenden Sie dann Gleichung (1).

A1

Sie sehen im Schaubild die Funktionen f und g. Vervollständigen Sie die Wertetabelle.

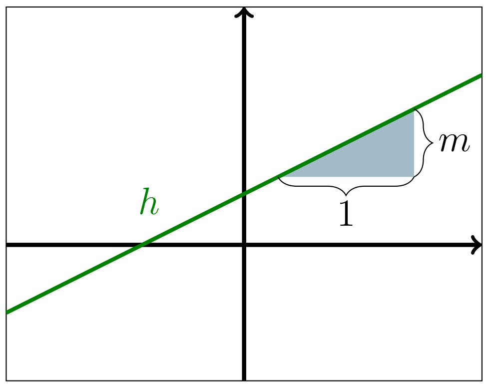


x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25

A2

Sie sehen im Schaubild die Funktion h.

- Vervollständigen Sie die Wertetabelle. Stellen Sie die Funktionswerte mit Hilfe von $h(-2)$ und m dar.
- Ergänzen Sie die Gleichungen unterhalb der Wertetabelle in dem Sie die richtige Anzahl m addieren.



x	-2.5	-2	-1	0	10
$h(x)$	$h(-2) - \frac{1}{2}m$	$h(-2)$	$h(-2) + m$	$h(-2) + 2m$	$h(-2) + 12m$

$$h(5) = h(2) + \boxed{3m}$$
$$h(5) = h(3) + \boxed{2m}$$
$$h(x_1 + x_2) = h(x_1) + \boxed{x_2 \cdot m} = h(x_2) + \boxed{x_1 \cdot m}$$

A3

Wir haben in A2 gesehen, dass für eine lineare Funktion f stets

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + x_2 \cdot m = f(x_2) + x_1 \cdot m \tag{1}$$

für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und ein bestimmtes $m \in \mathbb{R}$ gelten muss. (Das m hängt natürlich von der konkreten linearen Funktion ab.)

Berechnen Sie aus Gleichung (1) die allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Funktion. (Es muss natürlich $f(x) = m \cdot x + b$ herauskommen. Falls Sie einen weiteren Tipp benötigen, findet dieser sich etwas versteckt am unteren Ende dieser Seite.)

Es ist $f(x) = f(x+0) = f(0) + x \cdot m$
Zusätzlich definiert man $f(0) = b$.
Das geht weil $f(0)$ einfach eine Zahl ist.

A4

Entscheiden Sie ob durch die jeweiligen Angaben die lineare Funktion eindeutig festgelegt wird. Begründen Sie kurz.

Angaben	**Ja**	**Nein**	**Begründung**
Durch Angabe der Paramter m und b der allgemeinen Funktionsgleichung.	✓		Das ist genau der Sinn einer Funktionsgleichung. Sie legt für alle Elemente der Definitionsmenge fest, wohin sie abgebildet werden.
Durch die Angabe eines Punktes, der im Graph der Funktion enthalten ist.		✓	Reicht nicht aus. Durch z.B. den Ursprung gehen unendlich viele verschiedene lineare Funktionen.
Durch Angabe eines Punktes (der im Graph der Funktion enthalten ist) und des Steigungswinkels.	✓		Daraus lässt sich leicht die Funktionsgleichung berechnen. m ist gegeben und b erhält man durch eine Punktprobe.
Durch die Angabe, dass die Funktion ausschließlich im ersten und dritten Quadranten verläuft.		✓	Daraus lässt sich nur schließen, dass die Funktion den Ursprung enthält.

Hinweis A3: Beginnen Sie mit $f(x) = f(x+0) = \dots$ und verwenden Sie dann Gleichung (1).